DANIEL VLĂDUCU
MÁRTA KÁSA

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele V-VIII

Ediţia a IV-a

Editura Paralela 45

Redactare: Daniel Mitran
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
VLĂDUCU, DANIEL
Memorator de matematică pentru clasele V-VIII /
Daniel Vlăducu, Márta Kása. - Ed. a 4-a. - Pitești : Paralela 45, 2020
ISBN 978-973-47-3197-8

I. Kása, Márta

51

Cuprins

ALGEBRĂ

GEOMETRIE

ALGEBRĂ

MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE (N)

- Cifre romane (scrierea nepozițională):

I – 1	V – 5
X – 10	L – 50
C – 100	D – 500
M – 1000	

- Cifre arabe (scrierea pozițională): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Numărul natural de două cifre $\overline{ab}$, unde $a \neq 0$, $\overline{ab} = 10a + b$.
- Număr natural de trei cifre $\overline{abc}$, unde $a \neq 0$, $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.
- Numere consecutive – numerele care au diferența egală cu 1.
- Număr par – numărul care dă restul 0 la împărțirea cu 2 ($2n$ – număr par).
- Număr impar – numărul care dă restul 1 la împărțirea cu 2 ($2n + 1$ – număr impar).
- Mulțimea N = {0, 1, 2, 3, ...} se numește mulțimea numerelor naturale.

OPERAȚII CU NUMERE NATURALE

Adunarea

Oricare ar fi a, b, numere naturale, există c număr natural astfel încât: $a + b = c$, unde a, b – termeni; c – sumă.

Proprietăți:

1. Comutativitatea:
   $a + b = b + a$, oricare ar fi a, b numere naturale
2. Asociativitatea:
   $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi a, b, c numere naturale
3. Numărul 0 este element neutru față de adunare:
   $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi a număr natural

Scăderea

Oricare ar fi a, b, numere naturale, $a \geq b$, există c număr natural astfel încât:

$a - b = c$, unde a – descăzut; b – scăzător; c – diferență.

Înmulțirea

Oricare ar fi a, b, numere naturale, există c număr natural astfel încât: $a \cdot b = c$, unde a, b – factori; c – produs.

Proprietăți:

1. Comutativitatea:

   $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi a, b, numere naturale
2. Asociativitatea:

   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi a, b, c numere naturale
3. Distributivitatea:

   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi a, b, c numere naturale
4. Numărul 1 este element neutru față de înmulțire:

   $a \cdot 1 = a$, oricare ar fi a număr natural

Împărțirea

Fiind date două numere naturale d și i, $i \neq 0$, se poate scrie:

$d : i = c + r : i$, unde $0 \leq r < i$

Ordinea efectuării operațiilor

Dacă nu sunt paranteze, se efectuează în următoarea ordine:

- înmulțirea și împărțirea (operații de ordinul al doilea);
- adunarea și scăderea (operații de ordinul întâi).

Dacă sunt paranteze, se efectuează calculele:

- din parantezele rotunde (mici);
- din parantezele drepte (mari);
- din acolade.

Teorema împărțirii cu rest

Oricare ar fi două numere naturale d și i, $i \neq 0$, există două numere naturale c și r, $0 \leq r < i$, astfel încât: $d = i \cdot c + r$.

Puterea unui număr natural

- Dacă a este un număr natural, atunci puterea a n-a a numărului natural a se notează cu a^n și este $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}}$, unde a este baza puterii, iar n exponentul ei.

Reguli de calcul cu puteri

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : b^n = (a : b)^n$

Prin definiție

$a^0 = 1$

$1^n = 1$

$0^n = 0$

- Numărul a^2 se numește *pătrat perfect.*
- Numărul a^3 se numește *cub perfect.*

MULȚIMI

Definiție: Prin mulțime înțelegem o colecție de obiecte distincte care au aceeași proprietate sau aceleași proprietăți.

Observație: Obiectele din care este formată mulțimea sau elementele mulțimii apar o singură dată, indiferent de ordinea în care sunt considerate.

Notații: $A, B, C, \ldots X, \{a, b, c\}, \{x \mid x > 0\}$.

Mulțimea vidă „$\varnothing$" este mulțimea fără niciun element.

Numărul de elemente ale unei mulțimi A se numește **cardinalul mulțimii A** și se notează card A.

RELAȚII ÎNTRE ELEMENTE ȘI MULȚIMI

Apartenența „$\in$"

Dacă un element a se regăsește în mulțimea E, spunem că a aparține mulțimii E și notăm: $a \in E$. În caz contrar notăm $a \notin E$.

Relații între mulțimi

Mulțimi egale „="
Două mulțimi A și B sunt egale atunci când sunt formate din aceleași elemente: $A = B$.
Mulțimi incluse „⊂"
Mulțimea A este inclusă în mulțimea B atunci când orice element din A se află și în B: $A \subset B$.

Operații cu mulțimi

Reuniunea „∪": $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ reprezintă o nouă mulțime care conține toate elementele mulțimilor A și B comune și necomune luate o singură dată.
Intersecția „∩": $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$ reprezintă o nouă mulțime care conține toate elementele comune mulțimilor A și B.
Mulțimi disjuncte
Două mulțimi A și B sunt disjuncte dacă nu au niciun element comun: $A \cap B = \varnothing$.
Diferența „\" sau „–": $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ reprezintă o nouă mulțime formată din elementele lui A care nu sunt în B.

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

Definiție: Un număr natural a se divide cu un număr natural b dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. Spunem că „a este divizibil cu b" sau că „b divide a".
În acest caz, a este un multiplu al lui b și b este un divizor al lui a.

Notații: $a \,\vdots\, b$ (a este divizibil cu b) sau $b \mid a$ (b divide a).

Proprietăți:
1. Orice număr natural este divizibil cu 1 și cu numărul însuși, ce reprezintă divizorii improprii ai acelui număr.
2. Zero este divizibil cu orice număr natural: $a \mid 0$.

3. Dacă $b \mid a$ și $a \mid b$, atunci $a = b$, oricare ar fi $a, b \in \mathbf{N}$.
4. Dacă $a \mid b$ și $b \mid c$, atunci $a \mid c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{N}$.
5. Dacă $m \mid a$ și $m \mid b$, atunci $m \mid a + b$, oricare ar fi $m, a, b \in \mathbf{N}$.
6. Dacă $m \mid a$ și $m \mid b$, atunci $m \mid a - b$, oricare ar fi $m, a, b \in \mathbf{N}$; $a \geq b$.
7. Dacă $m \mid a$ și $m \mid b$, atunci $m \mid a \cdot b$, oricare ar fi $m, a, b \in \mathbf{N}$.

Mulțimea divizorilor
Notație: D_a = mulțimea tuturor numerelor care îl divid pe a.
Exemplu: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
Mulțimea divizorilor improprii ai lui 12 = $\{1, 12\}$.
Mulțimea divizorilor proprii ai lui 12 = $\{2, 3, 4, 6\}$.
Un număr natural, diferit de 1, ce are numai divizori improprii se numește număr prim.

Mulțimea multiplilor
Notație: M_a = mulțimea tuturor multiplilor lui a.
Exemplu: $M_2 = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, $n \in \mathbf{N}$.

Criterii de divizibilitate
- Un număr este divizibil cu:
  - 2, dacă cifra unităților este 0, 2, 4, 6, 8;
  - 3, dacă suma cifrelor este divizibilă cu 3;
  - 4, dacă ultimele două cifre formează (în ordinea în care sunt așezate) un număr divizibil cu 4 sau ambele sunt zerouri;
  - 5, dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5;
  - 6, dacă numărul este divizibil cu 2 și cu 3;
  - 8, dacă ultimele trei cifre formează (în ordinea în care sunt așezate) un număr divizibil cu 8 sau toate sunt zerouri;
  - 9, dacă suma cifrelor este divizibilă cu 9;
  - 11 – se adună cifrele de ordin cu soț și separat cele de ordin fără soț. Dacă diferența acestor sume este 0, 11 sau un număr divizibil cu 11, atunci și numărul este divizibil cu 11;
  - 25, dacă ultimele două cifre formează (în ordinea în care sunt așezate) un număr divizibil cu 25 sau ambele sunt zerouri;

- ♦ 125, dacă ultimele trei cifre formează (în ordinea în care sunt așezate) un număr divizibil cu 125 sau toate sunt zerouri;
- ♦ 10^n, dacă numărul se termină cu n zerouri, atunci numărul se divide cu $2^n \cdot 5^n$.

- Divizibilitatea cu 7, 11 și 13:
  - ♦ Un număr este divizibil cu 7, 11 sau 13 dacă diferența dintre numărul (A), format de ultimele trei cifre ale numărului dat, și numărul (B), format de celelalte cifre din față, este egală cu zero sau diferența este divizibilă prin 7, 11 sau 13.

Exemple:

1) $N = 110\,253 \Rightarrow A = 253; B = 110; A - B = 143$

143 este divizibil cu 11 și 13. Deci, și N este divizibil cu 11 și 13.

2) $N = 161\,161 \Rightarrow A = 161; B = 161; A - B = 0$

Deci, și N este divizibil cu 7, 11 si 13.

Număr prim

Definiție: Numărul ai cărui singuri divizori sunt 1 și el însuși.

Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.)

Definiție: C.m.m.d.c. a două sau mai multor numere naturale este cel mai mare număr natural care divide pe fiecare dintre ele.

Notație: (18, 27) = 9 sau c.m.m.d.c.(18, 27) = 9

Două numere fără divizori proprii comuni se numesc prime între ele.

Proprietate: Dacă un număr se divide cu două numere prime între ele, acel număr se divide și cu produsul lor.

Metode de aflare a c.m.m.d.c.:

1. Descompunerea în factori primi:
   - se descompun numerele în factori primi;
   - se înmulțesc între ei numai factorii comuni la puterea cea mai mică.
2. Algoritmul lui Euclid (numai pentru două numere):
   - se împarte cel mai mare la cel mai mic (se obține un rest R_1);
   - se împarte cel mic la restul obținut la prima împărțire (R_1) și se obține un nou rest R_2;
   - se împarte R_1 la R_2 și se obține restul R_3;
   - se împarte R_2 la R_3 ș.a.m.d. până se obține restul 0;
   - ultimul rest nenul este c.m.m.d.c.

Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)

Definiție: C.m.m.m.c. a două sau mai multor numere naturale este cel mai mic număr natural, diferit de 0, care se divide cu fiecare dintre ele.

Notație: [4, 6] = 12 sau c.m.m.m.c.(4, 6) = 12

Metoda de aflare a c.m.m.m.c.: Se descompun numerele în factori primi și se iau factorii primi comuni și necomuni, o singură dată, la puterea cea mai mare și se înmulțesc între ei.

Numere prime între ele

Definiție: Numerele care au drept c.m.m.d.c. pe 1.

NUMERE RAȚIONALE

FRACȚIA

$\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbf{N}, b \neq 0$; a – numărătorul fracției;

b – numitorul fracției.

Linia de fracție semnifică operația de împărțire.

Clasificarea fracțiilor:

- *fracții subunitare* = fracții cu numărătorul mai mic decât numitorul (reprezintă numere mai mici ca 1);

Exemple: $\frac{1}{5}; \frac{17}{20}; \frac{3}{100}$.

- *fracții echiunitare* = fracții cu numărătorul egal cu numitorul (reprezintă numere egale cu 1);

Exemple: $\frac{4}{4} = 1; \frac{17}{17} = 1; \frac{98}{98} = 1$.

• *fracții supraunitare* = fracții cu numărătorul mai mare decât numitorul (reprezintă numere mai mari decât 1);

Exemple: $\frac{6}{5}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{101}{25}$.

Simplificarea unei fracții

Se face prin împărțirea numărătorului și a numitorului cu un divizor comun (c.m.m.d.c.).

$$^{(d}\frac{a}{b} = \frac{a:d}{b:d},\ d \mid a \text{ și } d \mid b, d \neq 0$$

Amplificarea unei fracții

Se face prin înmulțirea numărătorului și a numitorului cu același număr, diferit de 0.

$$^{c)}\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, c \neq 0$$

Fracția ireductibilă

Definiție: Fracția în care numărătorul și numitorul sunt numere prime între ele (care a fost simplificată cu c.m.m.d.c. al numărătorului și numitorului).

$$\frac{a}{b}, \text{ cu } (a, b) = 1$$

Inversa unei fracții

Inversa fracției $\frac{a}{b}$ este $\frac{b}{a}$, $a, b \in \mathbf{N}^*$.

Opusa unei fracții

Opusa fracției $\frac{a}{b}$ este $\left(-\frac{a}{b}\right)$, $a, b \in \mathbf{N}^*$.

Aducerea fracțiilor la același numitor

Se face prin aflarea c.m.m.d.c. al numerelor de la numitor, care devine numitorul comun. Se amplifică fiecare fracție cu câtul dintre numitorul comun (cel nou) și numitorul fracției.

Compararea a două fracții

$$\frac{a}{b} \text{ și } \frac{c}{b}, a > c \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \text{ și } \frac{a}{c}, b < c \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a}{c}$$

$$\frac{m}{n} \text{ și } \frac{p}{q}, mq > np \Rightarrow \frac{m}{n} > \frac{p}{q}$$

Mulțimea numerelor raționale

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$$

OPERAȚII CU FRACȚII

Adunarea

• Dacă fracțiile au același numitor, suma lor este dată de o fracție ce are la numărător suma numărătorilor, iar la numitor, numitorul comun.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a+b+c}{m}$$

• Dacă fracțiile au numitori diferiți, se aduc la același numitor, apoi se însumează numărătorii obținuți, iar la numitor se pune numitorul comun.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Proprietățile adunării:

1. Adunarea este asociativă și comutativă:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right);\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b},$$

oricare ar fi $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbf{Q}$.